Übungen zu Mathematik I
Blatt 2

Aufgabe 1: Wir betrachten die beiden komplexen Zahlen $z = 2 - i$ und $w = 1 + 3i$. Bringen Sie die folgenden Ausdrücke in die Standardform $a + bi$:

$$z^* \quad \frac{1}{z}, \quad z + w, \quad z \cdot w \quad \text{und} \quad \frac{w}{z}.$$

Lösung:

$$\begin{aligned} z^* &= 2 + i \\ \frac{1}{z} &= \frac{2+i}{(2-i)\cdot(2-i)} = \frac{2+i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \\ z + w &= 3 + 2i \\ z \cdot w &= 5 + 5i \\ \frac{w}{z} &= (1+3i) \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i\right) = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = \frac{1}{i}, \quad z_2 = \frac{2+i}{1-i} \quad \text{und} \quad z_3 = (2+3i)^3.$$

Lösung:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{i}{i \cdot i} = -i \\ z_2 &= \frac{(2+i)\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \\ z_3 &= (2+3i)^3 = (2+3i)\cdot(2+3i)\cdot(2+3i) = (-5+12i)\cdot(2+3i) = -46+9i \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die folgenden Real- und Imanginärteile:

$$\begin{aligned} Re(z_1) &= 0, \quad Im(z_1) = -1 \\ Re(z_2) &= \frac{1}{2}, \quad Im(z_2) = \frac{3}{2} \\ Re(z_3) &= -46, \quad Im(z_3) = 9. \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Wir definieren die folgenden beiden komplexen Zahlen:

$$z_1 = -2 + 2i \quad \text{und} \quad z_2 = 3 + 3i.$$

a) Berechnen Sie $z_1 \cdot z_2$.

b) Überführen Sie die beiden Zahlen in Exponentialform und berechne Sie anschließend $z_1 \cdot z_2$ erneut. Sie können den Winkel z.B. in einer Skizze ablesen und benötigen keinen Taschenrechner.

c) Berechnen Sie z_1^4 und überlegen Sie sich, welche Darstellungsform Sie hierzu verwenden.

Lösung:

a) Es gilt: $z_1 \cdot z_2 = (-2+2i) \cdot (3+3i) = -12$.

b) Exponentialform: $z_1 = \sqrt{8} \cdot e^{3/4\pi \cdot i}$ und $z_2 = \sqrt{18} \cdot e^{1/4\pi \cdot i}$.

Damit ergibt sich das Produkt:

$$\begin{aligned} z_1 \dot{z}_2 &= \sqrt{8} \cdot e^{3/4\pi \cdot i} \cdot \sqrt{18} \cdot e^{1/4\pi \cdot i} \\ &= \sqrt{8 \cdot 18} \cdot e^{(3/4+1/4)\pi \cdot i} \\ &= 12 \cdot e^{\pi \cdot i} \\ &= -12 \end{aligned}$$

Hinweis: Die Winkel können z.B. aus einer Skizze abgelesen werden. Die komplexen Zeiger liegen jeweils auf Winkelhalbierenden des ersten uns zweiten Quadranten.

c) Die Exponentialform ist für die Multiplikation und damit auch für Potenzen besser geeignet. Wir erhalten:

$$z_1^4 = \left(\sqrt{8} \cdot e^{3/4\pi \cdot i}\right)^2 = \sqrt{8}^4 \cdot e^{4 \cdot 3/4\pi \cdot i} = 64 \cdot e^{3\pi \cdot i} = -64\,.$$

Hinweis: $3\pi = 2\pi + \pi$, d.h. der zugehörige Zeiger liegt im 2. Quadranten.

Aufgabe 4: Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke und geben Sie jeweils Real- und Imaginärteil an:

a) $(2-i) + (3+4i) - (2i-1)$

b) $(1+i) \cdot (i-1) \cdot (2+2i)$

c) $\dfrac{2+3i}{3-2i}$

d) $\dfrac{(2-i)+(2i-2)}{2+2i}$

e) $\dfrac{(1+i) \cdot (2-i)}{(2+i)-(1+3i)}$

f) $(2-3i) \cdot (1+i)^{-2}$

Lösung:

a) $(2-i)+(3+4i)-(2i-1) = 6+i$ also $Re(z) = 6$ und $Im(z) = 1$

b) $(2+3i)\cdot(2i-1) = -8+i$ also $Re(z) = -8$ und $Im(z) = 1$

c) $\dfrac{2+3i}{3-2i} = i$ also $Re(z) = 0$ und $Im(z) = 1$

d) $\dfrac{(2-i)+(2i-2)}{2+2i} = \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}i$ also $Re(z) = \frac{1}{4}$ und $Im(z) = \frac{1}{4}$

e) $\dfrac{(1+i)\cdot(2-i)}{(2+i)-(1+3i)} = \dfrac{1}{5}+\dfrac{7}{5}i$ also $Re(z) = \frac{1}{5}$ und $Im(z) = \frac{7}{5}$

f) $(2-3i)\cdot(1+i)^{-2} = -\frac{3}{2}-i$ also $Re(z) = -\frac{3}{2}$ und $Im(z) = -1$

Aufgabe 5: Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke, indem Sie möglichst einfache Darstellungsformen verwenden und ggf. die komplexen Zahlen entsprechend umwandeln.

a) $(1+i)\cdot i$

b) $(1+i)\cdot(i-1)\cdot(2+2i)$

c) $e^{\pi/2\cdot i}+\sqrt{2}e^{\pi/4\cdot i}$

d) $\left(e^{\pi/4\cdot i}\right)^2$

e) $(1+i)^4$

f) $\left(\sqrt{18}\cdot(\cos(\pi/4)+\sin(\pi/4)\cdot i\right)^2$

Lösung:

a) $(1+i)\cdot i = i+i^2 = i-1$

b) $(1+i)\cdot(i-1)\cdot(2+2i) = \sqrt{2}e^{\pi/4\cdot i}\cdot\sqrt{2}e^{3/4\pi\cdot i}\cdot\sqrt{8}e^{\pi/4\cdot i} = \sqrt{32}e^{5/4\pi\cdot i} = -4-4i$

c) $e^{\pi/2\cdot i}+\sqrt{2}e^{\pi/4\cdot i} = i+(1+i) = 1+2i$

d) $\left(e^{\pi/4\cdot i}\right)^2 = e^{2\cdot\pi/4\cdot i} = e^{\pi/2\cdot i} = i$

e) $(1+i)^4 = \left(\sqrt{2}\cdot e^{\pi/4\cdot i}\right)^4 = 4\cdot e^{4\cdot\pi/4\cdot i} = 4\cdot e^{\pi\cdot i} = -4$

f) $\left(\sqrt{18}\cdot(\cos(\pi/4)+\sin(\pi/4)\cdot i\right)^2 = \left(\sqrt{18}\cdot e^{\pi/4\cdot i}\right)^2 = 18\cdot e^{\pi/2\cdot i} = 18\cdot i$

Aufgabe 6:

a) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke zunächst per Hand. Überprüfen Sie ihre Ergebnisse dann z.B. mit Wolframalpha.

$$(1+i)+(2-3i)\,, \quad (1+i)\cdot(2-3i) \quad \text{und} \quad \frac{1+i}{2-3i}\,.$$

b) Wandeln Sie $z = e^{\pi/4\cdot i}$ in die algebraische Form um. Überprüfen Sie ihr Ergebnis mit Wolframalpha.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}(1+i)+(2-3i) &= 3-2i\\ (1+i)\cdot(2-3i) &= 5-i\\ \frac{1+i}{2-3i} &= \frac{1}{13}(-1+5i)\ .\end{aligned}$$

Der Screenshot in Abb. 1 zeigt die Eingabe für die zweite Aufgabe und die entsprechende Lösung.

b) Der Screenshot in Abb. 2 zeigt die Vorgehensweise und das Ergebnis $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Aufgabe 7: Geben Sie alle komplexen Zahlen $z = a + bi$ an mit:

$$\frac{1+z}{1-z} \text{ reell}\,(z\neq 1) \quad \text{und} \quad \frac{1+z}{1-z} \text{ rein imaginär}\,(z\neq 1)\,.$$

Lösung: Wir bringen zunächst den Ausdruck in die algebraische Form, damit wir Real- und Imaginärteil ablesen können. Dazu wird mit $1-z^*$ erweitert und umgeformt:

$$\begin{aligned}\frac{1+z}{1-z} &= \frac{(1+z)\cdot(1-z^*)}{(1-z)\cdot(1-z^*)}\\ &= \frac{1+(z-z^*)-z\cdot z^*}{1-(z+z^*)+z\cdot z^*}\end{aligned}$$

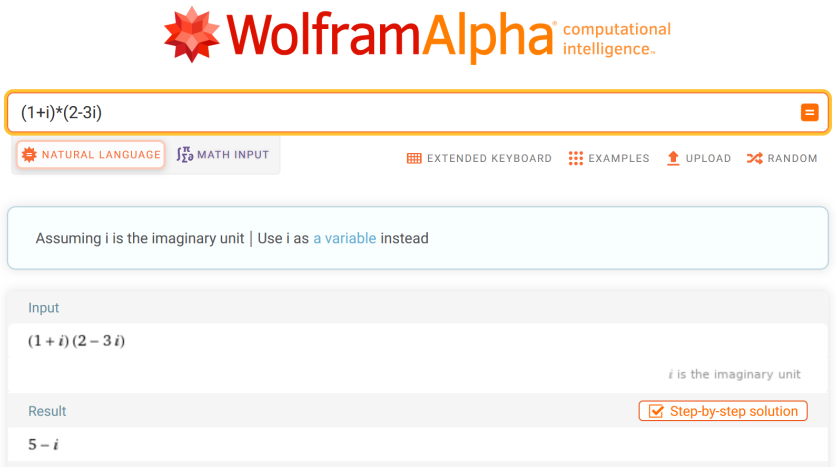


Abbildung 1: Screenshot von Wolframalpha zur Lösung von Aufg. 6 a)

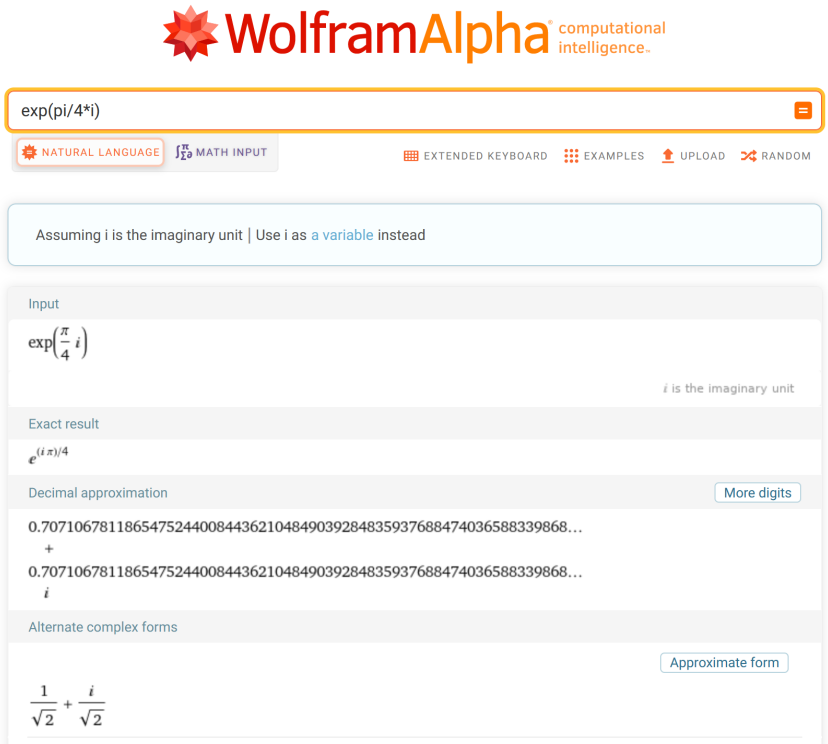


Abbildung 2: Screenshot von Wolframalpha zur Lösung von Aufg. 6 b)

Wir berechen nun die Standardausdrücke, indem wir die Form $z = 1 + bi$ einsetzen:

$$\begin{aligned} z \cdot z^* &= a^2 + b^2 = |z|^2 \\ z + z^* &= 2a \\ z - z^* &= 2bi\,. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1 + 2bi - (a^2 + b^2)}{1 - 2a + (a^2 + b^2)}\,,$$

Wenn der Ausdruck reell sein soll, dürfen keine Ausdrücke mit i auftrete, d.h. es muss $b = 0$ sein, damit $2bi$ im Zähler verschwindet.

Wenn der Ausdruck rein imaginär sein soll, muss der Realteil verschwinden. Der Realteil ist:

$$Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1 - (a^2 + b^2)}{1 - 2a + (a^2 + b^2)} = 0\,.$$

Der Zähler muss gleich null sein, d.h. wir erahlten:

$$1 - (a^2 + b^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z|^2 = 1\,.$$

Der Betrag der komplexen Zahl $z = a + bi$ muss also eins sein, d.h. der komplexe Zeiger muss auf dem Einheitskreis liegen. Ausgenommen ist die Zahl $z = -1$, da hier der Nenner verschwindet.